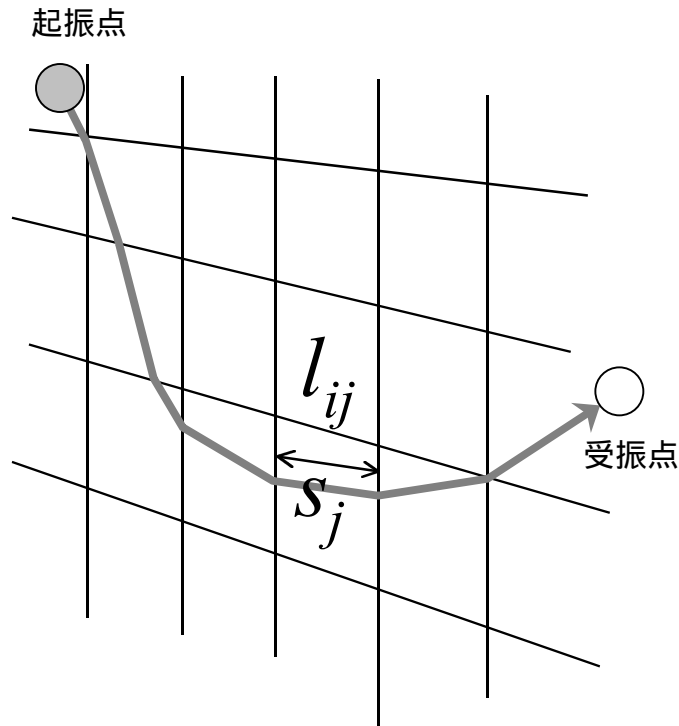


トモグラフィ解析の基礎

- トモグラフィ的解析とは？
- 最小二乗法
- 非線形最小二乗法
- SIRT
- パス計算

トモグラフィ解析 (波線と走時の離散化表現)



$$s = \frac{1}{u}$$

u: 速度
s: スローネス

$$t_i = \int_X \frac{dX}{u(X)} = \int_X s(X) dX$$

離散化

$$t_i = s_1 l_{i1} + s_2 l_{i2} + s_3 l_{i3} + s_4 l_{i4} + \cdots + s_N l_{iN}$$

$$t_i = \sum_{j=1}^N s_j l_{ij}$$

トモグラフィ的解析

M個の連立一次方程式 (M個の走時、N個の未知数)

$$t_1 = l_{11}s_1 + l_{12}s_2 + \cdots + l_{1N}s_N$$

$$t_2 = l_{21}s_1 + l_{22}s_2 + \cdots + l_{2N}s_N$$

$$t_3 = l_{31}s_1 + l_{32}s_2 + \cdots + l_{3N}s_N$$

•

$$t_M = l_{M1}s_1 + l_{M2}s_2 + \cdots + l_{MN}s_N$$

行列表現


$$LS = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2N} \\ l_{31} & l_{32} & \cdots & l_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{M1} & l_{M2} & \cdots & l_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_M \end{pmatrix} = T$$

波線経路 モデル 走時

最小二乗法

一般に $M > N$

最小二乗法の基礎

連立方程式 (Q1)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 &= 17 \\ 6x_1 + x_2 &= 23 \end{aligned}$$

2個の未知数に対して3個のデータ

行列表現

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix} = Y$$

ポイント！

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (6x_1 + x_2 - 23) = 6$$

$$AX = Y$$

行列A (Jacobian行列)

$$f_1 = 2x_1 + x_2 - 11$$

$$f_2 = 4x_1 + x_2 - 17$$

$$f_3 = 6x_1 + x_2 - 23$$



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

残差行列: e $e = AX - Y$

残差の二乗和を最小に

$$E = (AX - Y)^T (AX - Y) = \|AX - Y\|^2 \Rightarrow \text{Minimize}$$

Eの微分を0にする

$$\frac{dE}{dX} = 2A^T(AX - Y) = 0$$

この式をXについて解く

$$(A^T A)X = A^T Y$$

正規方程式

計算例(Q1)

$$2x_1 + x_2 = 11$$

$$4x_1 + x_2 = 17$$

$$6x_1 + x_2 = 23$$



$$(A^T A)X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix} = A^T Y$$



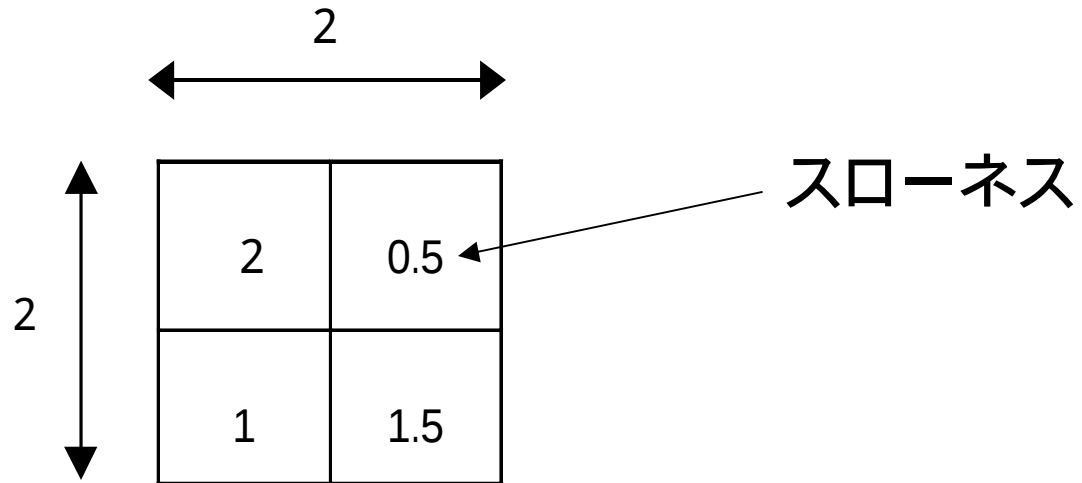
$$(A^T A)X = \begin{pmatrix} 56 & 12 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 228 \\ 51 \end{pmatrix} = A^T Y \text{ 正規方程式}$$



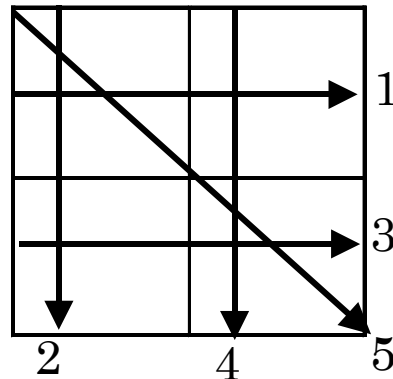
$$X = (A^T A)^{-1} A^T Y = \begin{pmatrix} 0.125 & -0.5 \\ -0.5 & 2.3333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 228 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

走時トモグラフィの計算例(Q2)

4個のセル



5本の波線



観測走時

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0.5 \\ 2+1 \\ 1+1.5 \\ 0.5+1.5 \\ 2\sqrt{2}+1.5\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.949747 \end{pmatrix}$$

Jacobian行列A (各セルを通過した波線の長さ)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$t_i = s_1 l_{i1} + s_2 l_{i2} + s_3 l_{i3} + s_4 l_{i4} + \cdots + s_N l_{iN}$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial s_j} = l_{ij}$$

解くべき連立方程式は

$$LS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.949747 \end{pmatrix} = T$$

正規方程式

$$L^T L S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 4.5 \\ 5.5 \\ 11.5 \end{pmatrix} = L^T T$$

これを解いて...

$$S^T = (s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4) = (2 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.5)$$

非線形問題



Jacobian行列を作るには波線経路が必要



速度構造がわからなければ波線は計算できない！



1回で解くことは不可能



非線形最小二乗法

非線形最小二乗法

Jacobian行列が定数とならない場合

$$y(Z) = x_1 Z - x_2 e^{-Zx_3}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y(z_m)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_m)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_m)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -e^{-Z_1 x_3} & -x_2 Z_1 e^{-Z_1 x_3} \\ z_2 & -e^{-Z_2 x_3} & -x_2 Z_2 e^{-Z_2 x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_m & -e^{-Z_m x_3} & -x_2 Z_m e^{-Z_m x_3} \end{pmatrix}$$

行列Aの中に求めるパラメータ(x)が入ってしまう！

非線形最小二乗法の逐次解法

初期値 X_0 に対して理論値 Y_0 を計算 $Y_0(Z) = Y(Z, X_0)$

理論値 Y_0 と観測値 Y の残差(ΔY)を計算 $\Delta Y = Y - Y_0$

X の修正量 ΔX を最小二乗法により計算 $(A^T A)\Delta X = A^T \Delta Y$

新しい推定値 X_1 を求める $X_1 = X_0 + \Delta X$

に戻る

残差が十分小さくなったら終了

計算例(Q3)

モデル

$$y(Z) = x_1 Z - x_2 e^{-Zx_3}$$

正しい値(答)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11個の観測データ

z	y(z)
0	-2
1	0.264241
2	1.729329
3	2.900426
4	3.963369
5	4.986524
6	5.995042
7	6.998176
8	7.999329
9	8.999753
10	9.999909

偏微分 $\frac{\partial y}{\partial x_1} = Z \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -e^{-Zx_3} \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = x_2 Z e^{-Zx_3}$

初期モデル $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jacobian行列A

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_1)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_2)}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y(z_{11})}{\partial x_1} & \frac{\partial y(z_{11})}{\partial x_2} & \frac{\partial y(z_{11})}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & -e^{-Z_1 x_3} & -x_2 Z_1 e^{-Z_1 x_3} \\ z_2 & -e^{-Z_2 x_3} & -x_2 Z_2 e^{-Z_2 x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{11} & -e^{-Z_{11} x_3} & -x_2 Z_{11} e^{-Z_{11} x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -0.1353352832 & 0.4060058497 \\ 2 & -0.0183156389 & 0.1098938333 \\ 3 & -0.0024787522 & 0.0223087696 \\ 4 & -0.0003354626 & 0.0040255515 \\ 5 & -0.0000453999 & 0.0006809989 \\ 6 & -0.0000061442 & 0.0001105958 \\ 7 & -0.0000008315 & 0.0000174621 \\ 8 & -0.0000001125 & 0.0000027008 \\ 9 & -0.0000000152 & 0.0000004112 \\ 10 & -0.0000000021 & 0.000000061815 \end{pmatrix}$$

観測値

$$Y^T = (-2.0000 \quad 0.264241 \quad 1.729329 \quad 2.900426 \quad 3.963369 \quad 4.986524 \quad 5.995042 \quad 6.998176 \quad 7.999329 \quad 8.999753 \quad 9.999909)$$

初期モデルに対する理論値

$$Y_0^T = (-3.0000 \quad 1.5940 \quad 3.9451 \quad 5.9926 \quad 7.9990 \quad 9.9999 \quad 12.0000 \quad 14.0000 \quad 16.0000 \quad 18.0000 \quad 20.0000)$$

残差ベクトル

$$\Delta Y = Y_0 - Y$$

$$\Delta Y_0^T = (-1.0000 \quad 1.3298 \quad 2.2157 \quad 3.0921 \quad 4.0356 \quad 5.0133 \quad 6.0049 \quad 7.0018 \quad 8.0007 \quad 9.0002 \quad 10.0001)$$

RMSE (Root Mean Square Error)

$$RMSE_0 = \sqrt{\frac{\Delta Y_0^T \Delta Y_0}{11}} = 5.9449$$

$$A_0^T A_0 = \begin{pmatrix} 385 & -0.181 & 0.71304 \\ -0.181 & 1.0187 & -0.057 \\ 0.71304 & -0.057 & 0.17743 \end{pmatrix} \quad A_0^T \Delta Y_0 = \begin{pmatrix} 386.3 \\ 0.7702 \\ 0.8728 \end{pmatrix}$$

$$(A_0^T A_0) \Delta X_0 = A_0^T \Delta Y_0 \quad \text{を解いて} \quad \Delta X_0 = \begin{pmatrix} 1.0016 \\ 1.0021 \\ 1.2162 \end{pmatrix}$$

Xの新しい推定値 X_1 は $X_1 = X_0 - \Delta X$ より

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.0016 \\ 1.0021 \\ 1.2162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9984 \\ 1.9979 \\ 0.7838 \end{pmatrix}$$

Xの新しい推定値 X_1 を用いて残差(RMSE)を計算すると

$$RMSE_1 = \sqrt{\frac{\Delta Y_1^T \Delta Y_1}{11}} = 0.0793$$

2回目の計算では

$$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 385 & -1.543 & 8.19332 \\ -1.543 & 1.2635 & -0.6652 \\ 8.19332 & -0.6652 & 2.02955 \end{pmatrix} A_1^T \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} -1.854 \\ 0.123 \\ -0.372 \end{pmatrix}$$

修正値は

修正したモデルは

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.002 \\ -0.179 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0.9984 \\ 1.9979 \\ 0.7838 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.002 \\ -0.179 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ 1.9959 \\ 0.9625 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

残差は

$$RMSE_2 = \sqrt{\frac{\Delta Y_2^T \Delta Y_2}{11}} = 0.0122 \cong 0$$

走時トモグラフィの場合

連立方程式

$$LS = T$$

現実にはLはSの関数 $L(S)S = T \longrightarrow$ 非線型問題

初期モデル S_0 $\xrightarrow{\text{パス計算}}$ L_0 Jacobian行列Lは
波線経路である！
 $\searrow$ T_0^c 理論走時

つまり

$$\Delta T_0 = T^o - T_0^c = T^o - L_0 S_0$$

修正値を求めて

$$L_0 \Delta S_0 = \Delta T_0$$

モデルを修正

$$S_1 = S_0 + \Delta S_0$$

K回目のイタレーションでは

$$\Delta T_k = T^O - T_k^C = T^O - L_k S_k$$

$$L_k \Delta S_k = \Delta T_k$$

$$S_{k+1} = S_k + \Delta S_k$$

連立方程式を簡単に解く (SIRT)

対角成分だけを用いる

$$L^T L \Delta S = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n l_{i1}^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n l_{i2}^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \sum_{i=1}^n l_{im}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \cdot \\ \Delta s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \Delta t_i l_{i1} \\ \sum_{i=1}^n \Delta t_i l_{i2} \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^n \Delta t_i l_{im} \end{pmatrix} = L^T \Delta T$$

$$\Delta s_j = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i l_{ij}}{\sum_{i=1}^n l_{ij}^2} \cdot a \cong \frac{\sum_{i=1}^n \left(\Delta t_i \frac{l_{ij}}{L_i} \right)}{\sum_{i=1}^n l_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\Delta t_i \frac{t_{ij}}{T_i^c} \right)}{\sum_{i=1}^n l_{ij}} \quad \begin{matrix} L_i = \sum_{j=1}^m l_{ij} \\ T_i = \sum_{j=1}^m t_{ij} \end{matrix}$$

SIRTの計算例(Q4)

Q2より

$$LS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.949747 \end{pmatrix} = T$$

初期値

$$S_0^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

残差の計算

$$\Delta T_0 = T - T_0^c = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.9497 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2.8284 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 2.1213 \end{pmatrix}$$

RMSE

$$RMSE_0 = \sqrt{\frac{\Delta T^T \Delta T}{5}} = 2.44949$$

例えば1 番目のセルでは

$$\Delta S_j = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta t_i}{L_i} \right) l_{ij}}{\sum_{i=1}^n l_{ij}} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.5 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \times 2.1213}{1 + 1 + \sqrt{2}} = 0.53033$$

同様に

$$S_1 = S_0 + \Delta S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.53033 \\ 0.125 \\ 0.375 \\ 0.383883 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.53033 \\ 1.125 \\ 1.375 \\ 1.383883 \end{pmatrix}$$

正規方程式を計算
しなくてよい

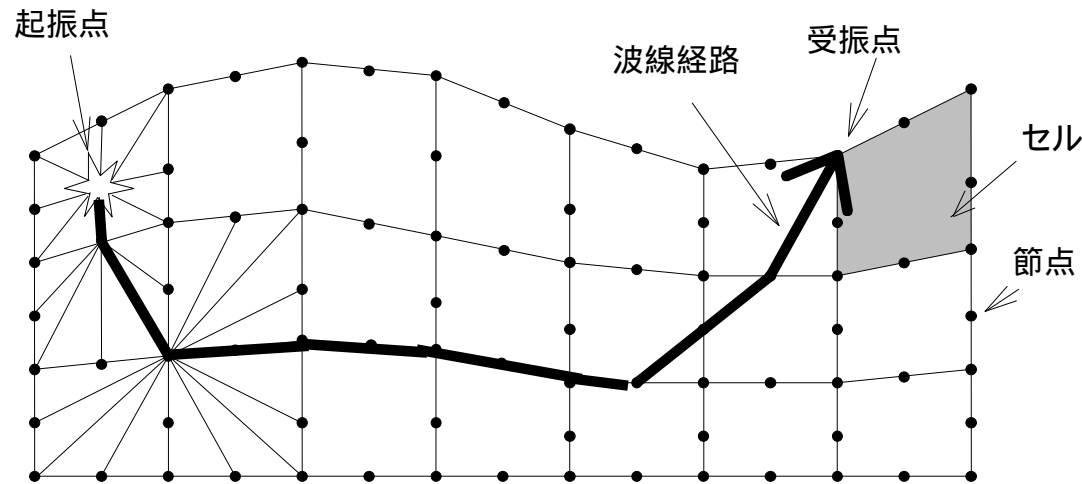
2回目は

$$\Delta T_1 = T - T_1^c = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 2.5 \\ 2 \\ 4.9497 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.65533 \\ 2.90533 \\ 2.75888 \\ 2.50888 \\ 4.12132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1553 \\ 0.09467 \\ -0.2589 \\ -0.5089 \\ 0.82843 \end{pmatrix}$$

RMSE

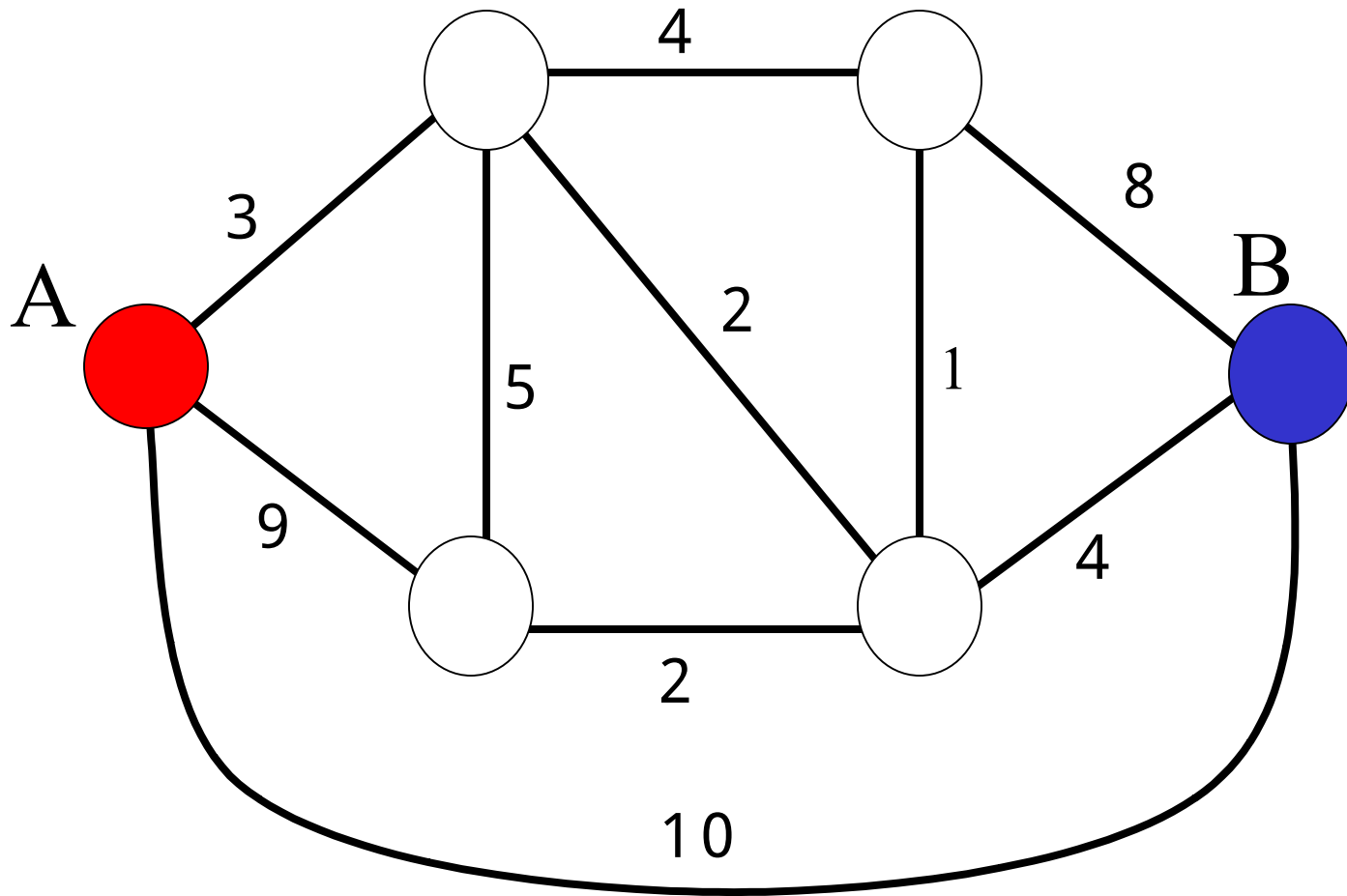
$$RMSE_1 = \sqrt{\frac{\Delta T^T \Delta T}{5}} = 1.02243$$

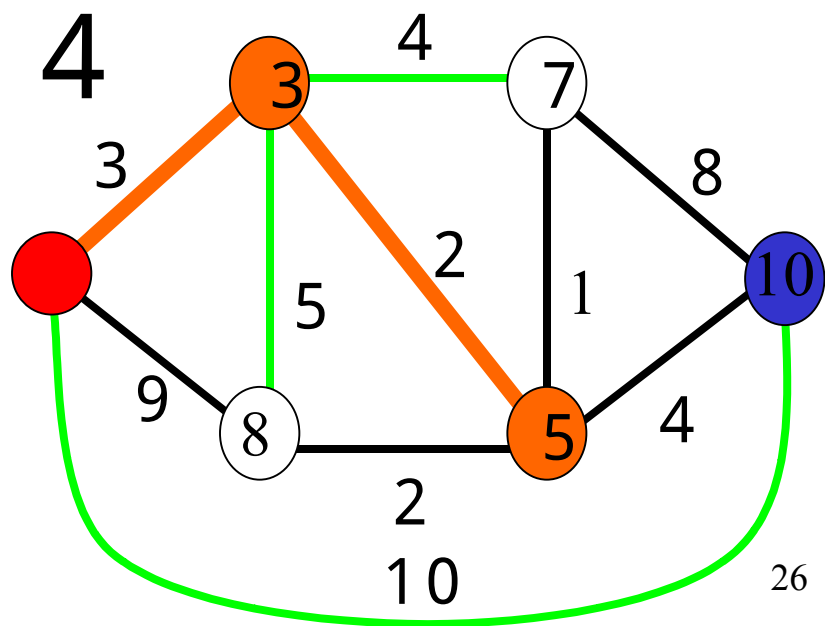
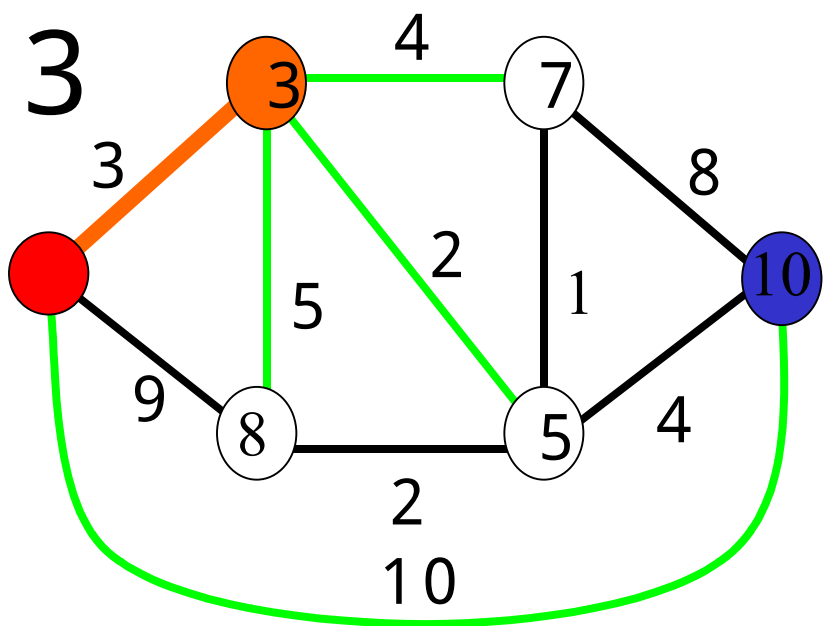
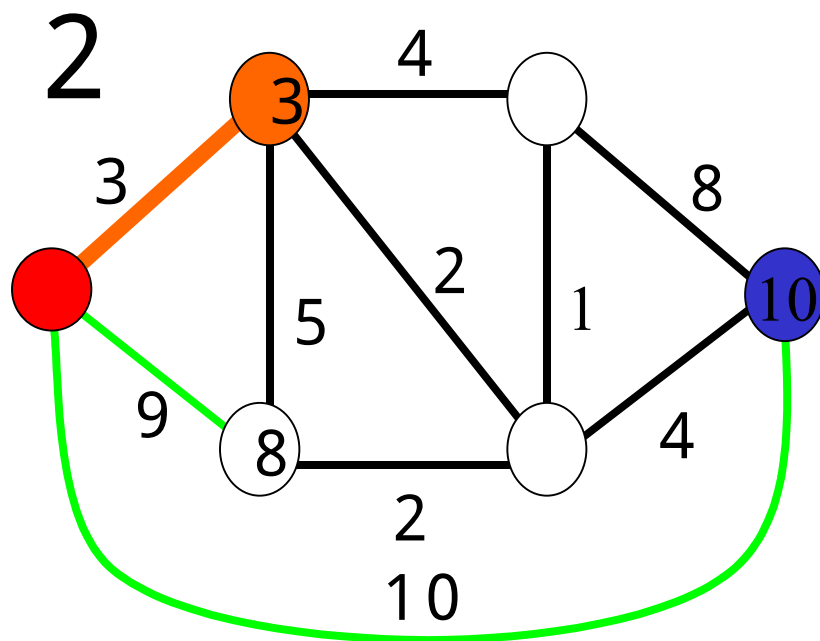
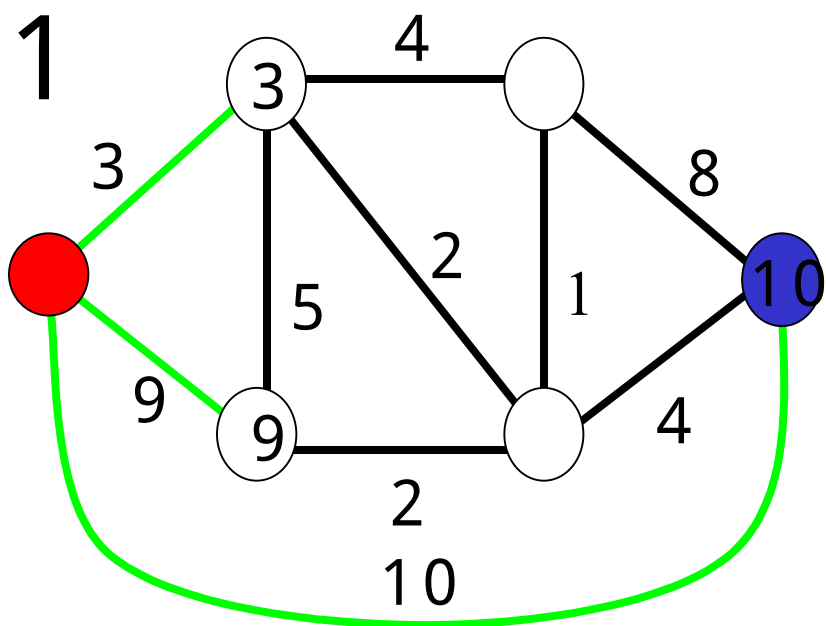
コンピューターによる 理論走時計算(パス計算)

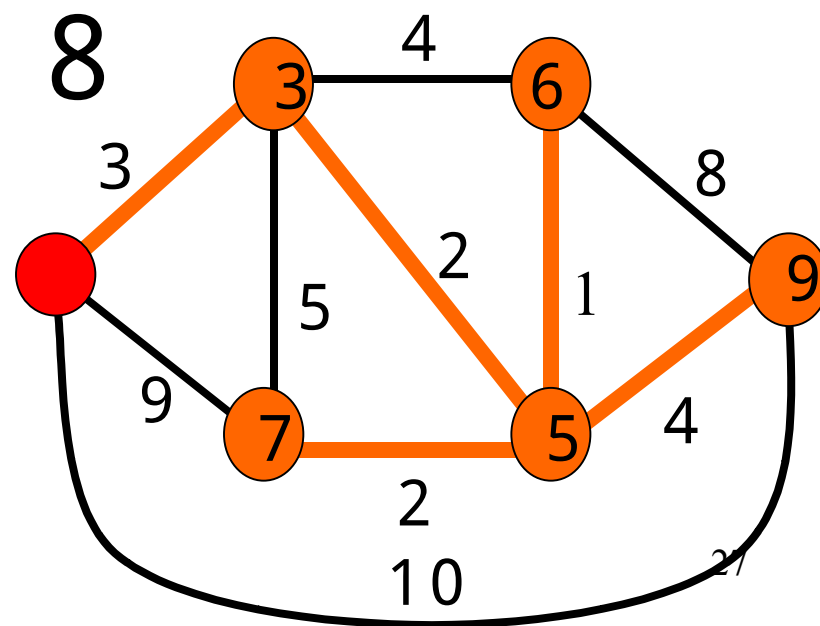
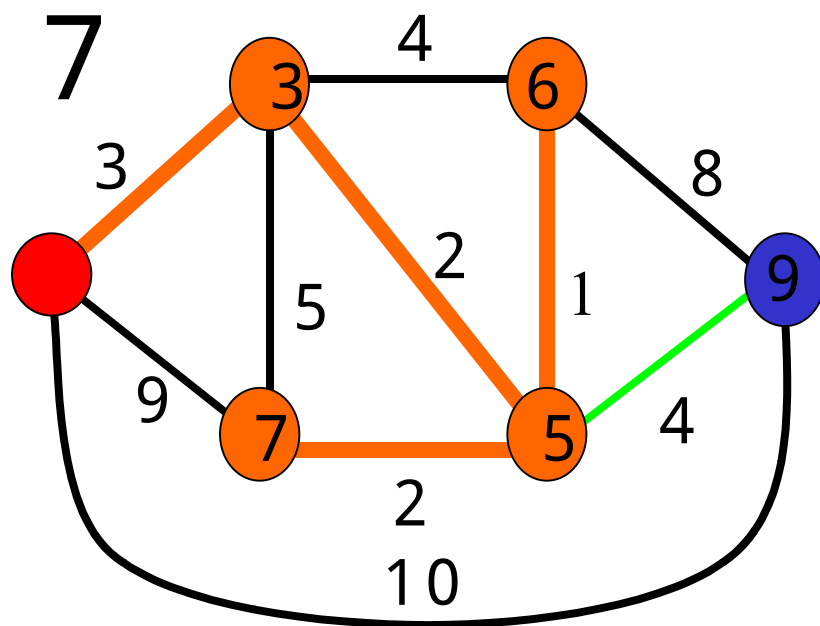
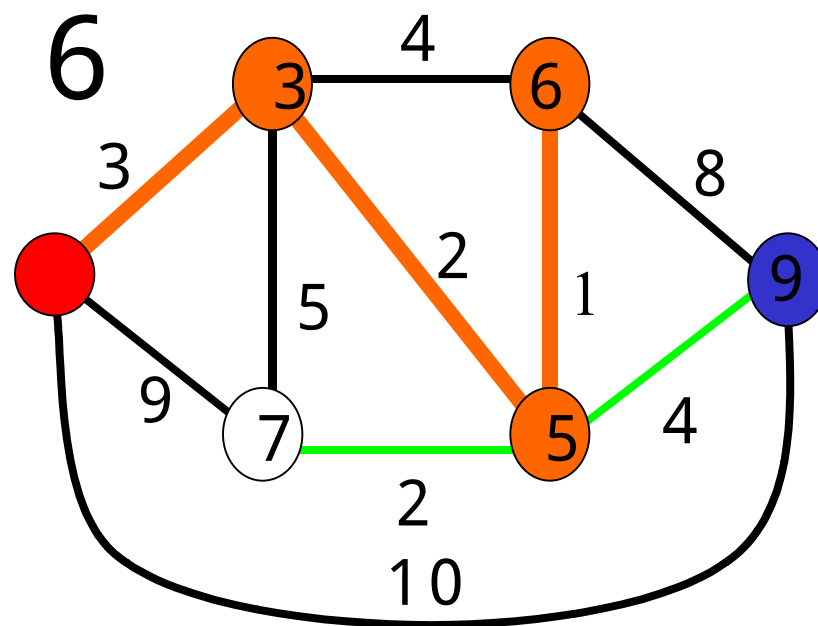
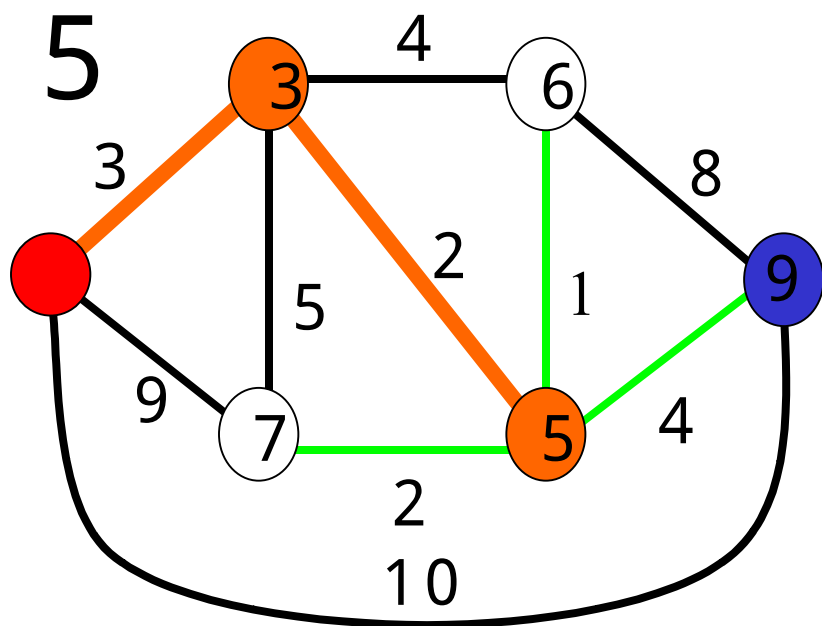


- 速度構造モデルを複数の四辺形(セル)に近似する。各セル内の弾性波速度は一定とする。
- 各セルの周辺上(速度境界線上)に複数(8~36個)の節点を設定する。
- 起振点から射出された波線は、これらの節点間をたどるものとする。
- 起振点 - 受振点間の初動走時は、これらの節点をたどる経路のうち最も走時の短い経路の走時とする。
- 複数の同一速度セルを通過する波線は、その同一速度セル内は直線で計算できる。

AからBへの最短経路の検索

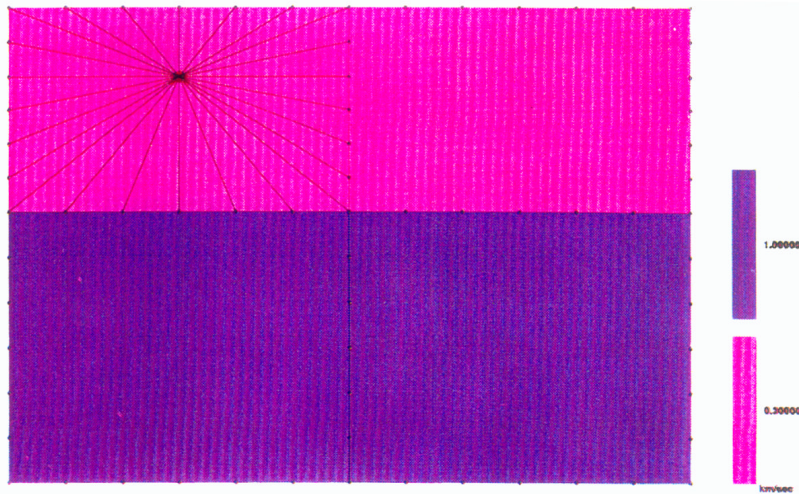




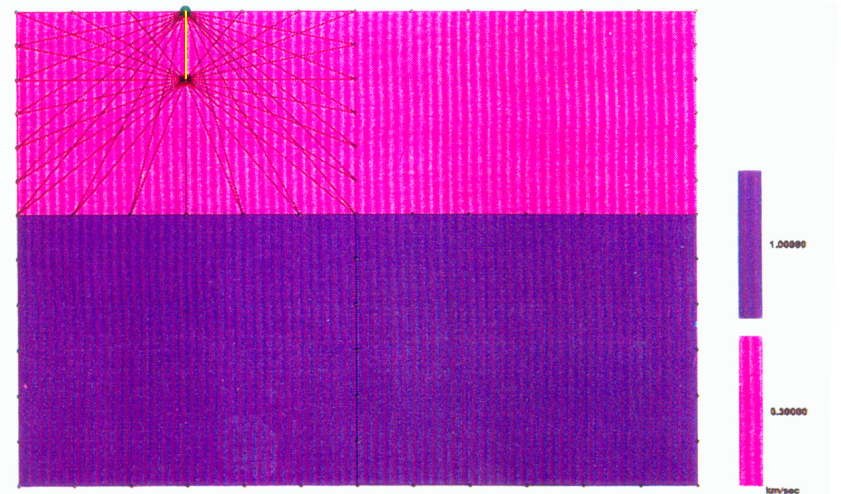


波線の計算例(1)

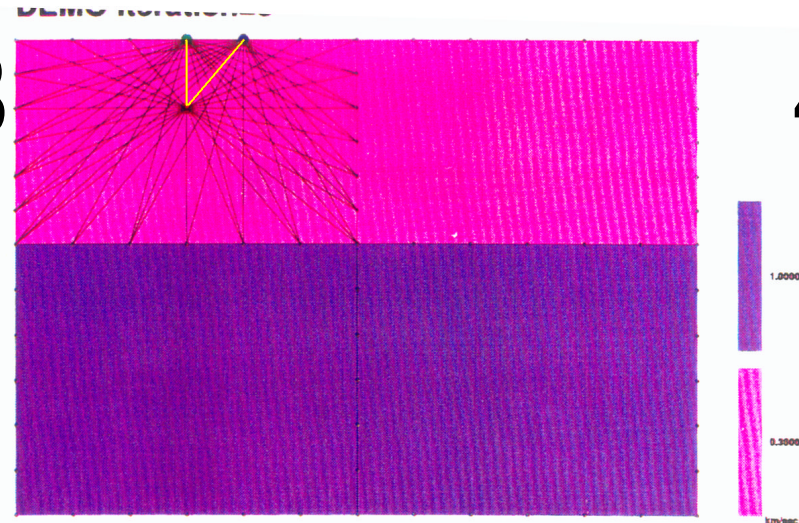
1



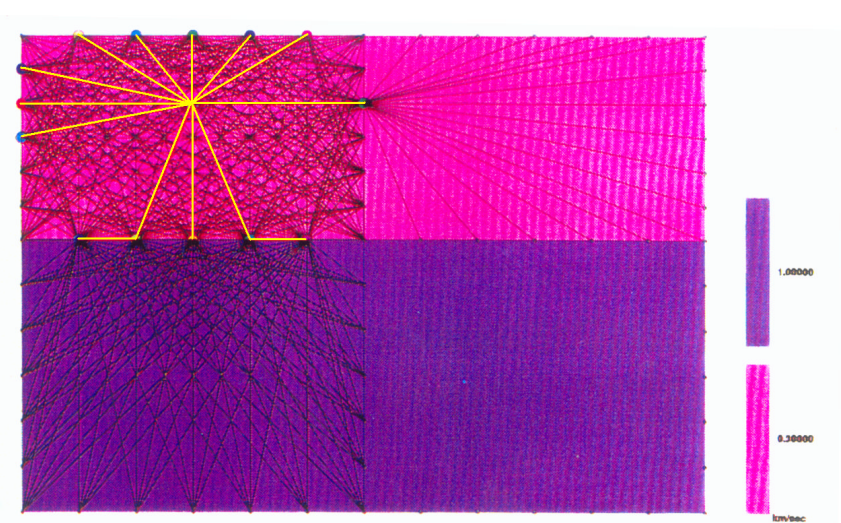
2



3

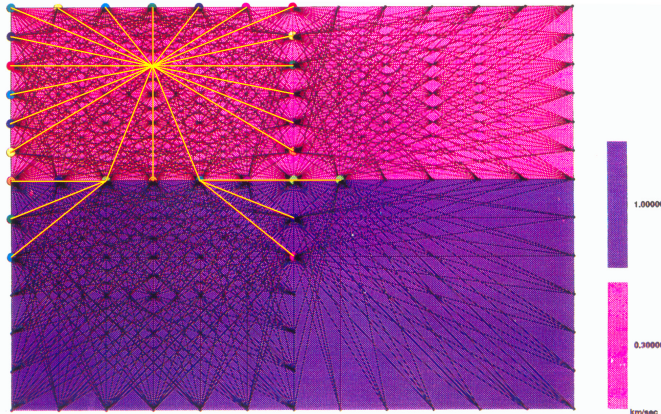


4

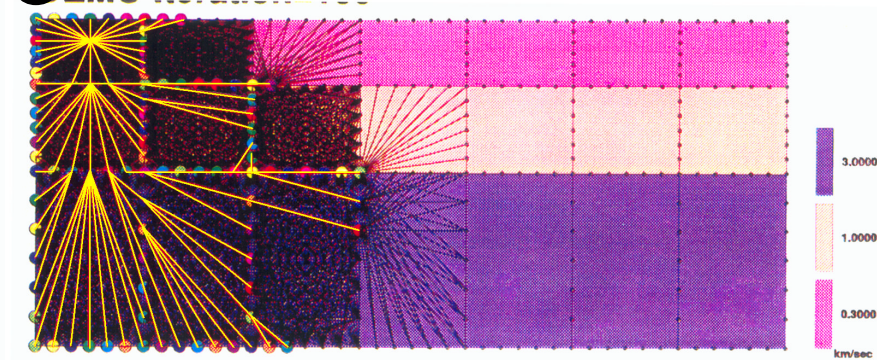


波線の計算例(2)

5



6



7

